

8.3.3 Splátky dluhů

Předpoklady: 080302

Splácení dluhů

Méně příjemnou součástí finanční matematiky je výpočet splátek dluhu.

Př. 1: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2019 úvěr ve výši 1 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 6 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2020, 2021 a 2022). Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Budeme postupně sledovat výši dluhu, který má podnikatel vůči bance.

Výši splátky označíme s

Konec roku 2019 ... 10^6

Konec roku 2020, před splátkou ... $10^6(1+0,06)$ (dluh se zvětšil, protože si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2020, po 1. splátce ... $10^6(1+0,06) - s$

Konec roku 2021, před splátkou ...

$[10^6(1+0,06) - s](1+0,06) = 10^6(1+0,06)^2 - s(1+0,06)$ (k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2021, po 2. splátce ... $10^6(1+0,06)^2 - s(1+0,06) - s$

Konec roku 2022, před splátkou ...

$[10^6(1+0,06)^2 - s(1+0,06) - s](1+0,06) = 10^6(1+0,06)^3 - s(1+0,06)^2 - s(1+0,06)$
(k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2022, po 3. splátce ...

$10^6(1+0,06)^3 - s(1+0,06)^2 - s(1+0,06) - s = 0$ (úvěr je splacen)

Spočítáme s : $10^6(1+0,06)^3 = s[(1+0,06)^2 + (1+0,06) + 1]$

Modře vyznačený výraz je součtem prvních tří členů geometrické posloupnosti $a_1 = 1$,

$q = 1+0,06 \Rightarrow$ výraz můžeme zjednodušit pomocí vzorce pro součet prvních n členů

geometrické řady (v tomto případě to není velké zjednodušení, ale v případě většího množství splátek to jasně zjednodušení je)

$$10^6(1+0,06)^3 = s \frac{(1+0,06)^3 - 1}{(1+0,06) - 1}$$

$$10^6(1+0,06)^3 = s \frac{(1+0,06)^3 - 1}{0,06}$$

$$s = \frac{10^6 (1+0,06)^3 \cdot 0,06}{(1+0,06)^3 - 1} = 374\,109,80 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $3 \cdot 374\,109,8 = 1\,122\,329,40 \text{ Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $1\,122\,329,40 - 1\,000\,000 = 122\,329,40 \text{ Kč}$

Podnikatel zaplatil úvěr ve třech splátkách po 374 110 Kč, na úrocích pak zaplatí 122 330 Kč.

Dodatek: Všíímavý čtenář si jistě všiml, že úroková míra je u půjčky znatelně vyšší než spoření. Důvod je jednoduchý rozdíl mezi úrokovou mírou u spoření a půjček je zdrojem (býval dokonce hlavním) zisku banky, hradí se z něj provozní výdaje a zohledňuje také riziko nesplacení půjčky. Snahou bank tedy je poskytovat spoření za co nejnižší úroky a půjčky za úroky co nejvyšší.

Př. 2: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2019 úvěr na 10 let ve výši 5 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 4,9 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku. Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Můžeme odvozovat stejně jako v předchozím příkladu:

Konec roku 2019, po 10. splátce

...

$$5 \cdot 10^6 (1+0,049)^{10} - s(1+0,049)^9 - \dots - s(1+0,049) - s = 0 \text{ (úvěr je splacen)}$$

$$\text{Spočítáme } s: 5 \cdot 10^6 (1+0,049)^{10} = s \left[(1+0,049)^9 + \dots + (1+0,049) + 1 \right]$$

$$5 \cdot 10^6 (1+0,049)^{10} = s \frac{(1+0,049)^{10} - 1}{(1+0,049) - 1}$$

$$5 \cdot 10^6 (1+0,049)^{10} = s \frac{(1+0,049)^{10} - 1}{0,049}$$

$$s = \frac{5 \cdot 10^6 (1+0,049)^{10} \cdot 0,049}{(1+0,049)^{10} - 1} = 644\,382,10 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $10 \cdot 644\,382,10 = 6\,443\,820 \text{ Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $6\,443\,820 - 5\,000\,000 = 1\,443\,820 \text{ Kč}$

Podnikatel zaplatil úvěr v deseti splátkách po 644 382,10 Kč, na úrocích pak zaplatí 1 443 820 Kč.

Př. 3: Sestav pomocí řešení předchozích příkladů vzorec pro výpočet splátky s úvěru D Kč, na n let s roční úrokovou mírou p a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v n stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru).

$$s = \frac{D \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100} \right)^n - 1}$$

Pokud banka poskytne úvěr D Kč na n let s roční úrokovou mírou p a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v n stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru) je výsledná výše splátky určena vztahem:

$$s = \frac{D \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}.$$

Př. 4: Pavel Novák si při koupi bytu půjčil na hypoteční úvěr 2 500 000 Kč. Banka úvěr poskytla na 25 let, s roční úrokovou mírou fixovanou na celou dobu splácení na 2,69 % a měsíčním úrokovým obdobím. Úvěr je splácen formou měsíčních splátek, první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 25 let. Urči výšku jedné splátky.

Můžeme postupovat zcela stejně jako v předchozích příkladech, roční úrokovou míru musíme přepočítat na jeden měsíc.

Celkový počet splátek: $25 \cdot 12 = 300$

Měsíční úroková míra: $\frac{2,69}{12} \doteq 0,224$

Po splacení celého úvěru:

$2,5 \cdot 10^6 (1 + 0,00224)^{300} - s(1 + 0,00224)^{299} - \dots - s(1 + 0,00224) - s = 0$ (úvěr je splacen)

Spočítáme s : $2,5 \cdot 10^6 (1 + 0,00224)^{300} = s \left[(1 + 0,00224)^{299} + \dots + (1 + 0,00224) + 1 \right]$

$$2,5 \cdot 10^6 (1 + 0,00224)^{300} = s \cdot \frac{(1 + 0,00224)^{300} - 1}{(1 + 0,00224) - 1}$$

$$2,5 \cdot 10^6 (1 + 0,00224)^{300} = s \cdot \frac{(1 + 0,00224)^{300} - 1}{0,00224}$$

$$s = \frac{2,5 \cdot 10^6 \left(1 + \frac{2,69}{12 \cdot 100}\right)^{300} \cdot \frac{2,69}{12 \cdot 100}}{\left(1 + \frac{2,69}{12 \cdot 100}\right)^{300} - 1} = 11\,456,10 \text{ Kč (místo zaokrouhleného čísla } 0,00224)$$

dosadíme vztah $\frac{2,69}{12 \cdot 100}$

Celková částka zaplacená p. Novákem: $300 \cdot 11\,456,10 = 3\,436\,830$ Kč.

Zaplaceno na úrocích: $3\,436\,830 - 2\,500\,000 = 936\,830$ Kč.

Pedagogická poznámka: Výpočty hypoték mají jednu obrovskou výhodu, je možné si ihned kontrolovat výsledky na on-line kalkulačkách na internetu.

Př. 5: Urči, jak by se splátky Pavlovy hypotéky změnily, kdyby Pavel prodloužil dobu splatnosti na 30 let.

Počet splátek: $30 \cdot 12 = 360$

Dosadíme rovnou do konečného vzorce:

$$s = \frac{10^6 \left(1 + \frac{2,69}{12 \cdot 100}\right)^{360} \cdot \frac{2,69}{12 \cdot 100}}{\left(1 + \frac{2,69}{12 \cdot 100}\right)^{360} - 1} = 10\,126,80 \text{ Kč}$$

Pokud se prodlouží doba splácení hypotéky na 30 let, klesne měsíční splátka na 10 126,8 Kč.

Př. 6: Jednou z oblíbených forem nákupů na dluh je půjčka 10+1. Při této půjčce zaplatí kupující v obchodě pouze desetinu ceny a pak zaplatí deset dalších splátek ve stejné výši (zaplatí tedy postupně 110 % běžné prodejní ceny). Porovnej výhodnost tohoto typu půjčky s klasickým bankovním úvěrem s roční úrokovou mírou 6,9 % a deseti měsíčními splátkami s úrokovacím obdobím 1 měsíc. Předpokládej, že si spotřebitel chce pořídit novou QLED televizi v nákupní ceně 21 999 Kč.

Splácení 10+1 $\Rightarrow$ kupující zaplatí 110 % ceny, tedy: $21999 \cdot 1,1 = 24\,198,9$ ~~24 198,9~~ Kč.

Půjčka: použijeme vzorec:

přepočítaná úroková míra na 12 měsíců ... $\frac{6,9}{12} \%$

počet splátek: 10

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{20000 \left(1 + \frac{6,9}{12 \cdot 100}\right)^{10} \cdot \frac{6,9}{12 \cdot 100}}{\left(1 + \frac{6,9}{12 \cdot 100}\right)^{10} - 1} = 2270,10 \text{ Kč} \Rightarrow$ pokud by si

kupující půjčil na televizi v bance, zaplatil by celkem 22 701 Kč (celkem o 1 497,9 Kč méně než v případě půjčky 10+1), navíc by první splátku splácel až měsíc po nákupu.

Př. 7: Petáková:

strana 72/cvičení 67

strana 71/cvičení 68

Shrnutí: Splátky dluhu se dají mimo předpřipravené vztahy vypočítat i pomocí součtu geometrické řady.